

ΜΑΘΗΜΑ: 5

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, ΤΗΣ Τ.Μ.
 $X_{(n)} = \max X_i$, ΤΗΣ Τ.Μ. $X_{(1)} = \min X_i$, ΟΤΑΝ $X_1, \dots, X_n$ ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ

→ Εύρεση της κατανομής $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

Μέθοδος της πορογενήτριας

$$m_Y(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} E(e^{tY}) \Rightarrow$$

Όταν $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα τότε οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες

$$\Rightarrow m_Y(t) = E(e^{t \sum_{i=1}^n X_i}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) =$$

$$\stackrel{\text{νόμος ανεξαρτησίας}}{=} \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = E(e^{tX})^n = (m_X(t))^n$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

① Έστω $X_i \sim \text{Poisson}(\theta)$

$$m_Y(t) = (e^{\theta(e^t-1)})^n = e^{n\theta(e^t-1)}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

Από το τυπικό για Poisson

Αυτή είναι η πορογενήτρια της Poisson($n\theta$)

② Έστω $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$

$$m_Y(t) \stackrel{t \leq \theta}{=} \left(\frac{\theta}{\theta - t} \right)^n = \left(\frac{\theta}{\theta(1 - \frac{t}{\theta})} \right)^n = (1 - \frac{t}{\theta})^{-n} \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Gamma}(n, \frac{1}{\theta})$$

Βρίσκω κοινό παρονομαστή στα παρονομαστές για να απλοποιηθεί με τον αριθμητή. Στην αρχική μορφή δεν είναι πορογενήτρια κάποια γνωστή κατανομής

→ Εύρεση της κατανομής της τ.φ. $X_{(n)} = \max X_i$

Μέθοδος της α.σ.κ. $F_{X_{(n)}}(y) = P(\max X_i \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) =$

$$\stackrel{\text{X}_i \text{ ανεξάρτητες}}{=} P(X_1 \leq y) \dots P(X_n \leq y) = P(X \leq y)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{X_{(n)}}(y) = F_X^n(y)$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{d}{dy} F_{X_{(n)}}(y) = \frac{d}{dy} (F_X^n(y)) = n f_X^{n-1}(y) \frac{d}{dy} F_X(y) \Rightarrow \boxed{f_{X_{(n)}}(y) = n f_X^{n-1}(y) f_X(y)}$$

→ Έρευνα της κατανομής της τ.φ. $X_{(1)} = \min X_i$

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(y) &= P(\min X_i \leq y) = 1 - P(\min X_i > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y) P(X_2 > y) \dots P(X_n > y) = 1 - P^n(X > y) = 1 - (1 - P(X \leq y))^n \\ &= 1 - (1 - F_X(y))^n \end{aligned}$$

Άρα $F_{X_{(1)}}(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$

$$f_{X_{(1)}}(y) = \frac{d}{dy} F_{X_{(1)}}(y) = \frac{d}{dy} [1 - (1 - F_X(y))^n] = -\frac{d}{dy} (1 - F_X(y))^n$$

$$= -n(1 - F_X(y))^{n-1} \frac{d}{dy} (-F_X(y))$$

$$f_{X_{(1)}}(y) = n(1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y)$$

Τα $X_{(1)}, X_{(n)}$ δεν είναι ανεξάρτητα

Χρήσιμα Αξιολόγησις Εκτιμητών

ΜΤΣ :

$$E(d - \theta)^2 = \text{Var} d + (E d - \theta)^2$$

- ① Ανεξάρτητα του θ $E T(X) = \theta$
της $g(\theta)$ $E T(X) = g(\theta)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το σύνολο των ανεξάρτητων Εκτιμητών είναι είτε $\emptyset$, {μοναδικός} είτε {άπειροι το πλήθος}

- ② Ανεξάρτητες
Ομοιογενείς
Εκτιμήτριες
Διακρίνουσες

Από προηγούμενα
μαθήματα

+ Στατιστική Συμπερασματική

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΓΡΑΦΩΝ

- ① Κάνω γραφή της ανισότητας Cramer-Rao

Για να χρησιμοποιηθεί αυτή η μεθοδολογία πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες αυστηρές προϋποθέσεις. Η εφαστάση ότι ισχύουν αυτές οι συνθήκες, δεν είναι πάντα εύκολη.

1η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια από τις συνθήκες είναι ότι το πεδίο ορισμού δεν εξαρτάται από το θ
 Άρα όταν π.χ. έχω τυχαίο δείγμα $x_1, \dots, x_n$ από την $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x \leq \theta$
 η μεθοδολογία ΔΕΝ ΔΟΥΛΕΥΕΙ!

Αδυναμία: Χρειάζεται να μαντέψω πού επιτυγχάνεται η ισότητα στο κάτω σχήμα της Cramer-Rao.

Παρουσίαση της C-R: Αν $f(x|\theta) = c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)}$ $x \in A$
 Εξθετική οικογένεια κατανοών

A : σύνολο ανεξάρτητο του θ

Τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες φαιδρότητας

2η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το ίδιο που αντιστοιχεί Cramer-Rao επιτυγχάνεται αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \kappa(\theta, n) (U - g(\theta))$$

τότε ο U είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα. Βρες ΑΟΕΔ συνάρτησης του θ , $\theta > 0$, θ^e

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

το πεδίο ορισμού δεν εξαρτάται από το θ

$$\begin{aligned} f(x|\theta) &= c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)}, \quad x \in A \\ &= e^{-\theta} \frac{1}{x!} e^{x \log \theta} \\ &= \theta^{-\theta} \frac{1}{x!} e^{x \log \theta} \end{aligned}$$

$\left. \begin{aligned} & \text{η } f(x|\theta) \text{ μπορεί να γραφτεί στη μορφή} \\ & c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)} \\ & \text{όπου} \\ & e^{-\theta} : c(\theta) \\ & \frac{1}{x!} : h(x) \\ & x : T(x) \\ & \log \theta : Q(\theta) \end{aligned} \right\} \text{Δεν είναι} \\ & \text{μονοσήμαντα} \\ & \text{ορισμένα}$

πληρούνται οι συνθήκες φαιδρότητας

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$$

$$\log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \log \theta - n\theta - \log \prod_{i=1}^n x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta} - n = \frac{n}{\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta \right)$$

$U(x_1, \dots, x_n, n)$

$$0 \quad U = \frac{\sum x_i}{n} \text{ είναι ΑΟΕΔ του } \theta$$

Για το $\theta+5$ χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα από τη C-R για το θ , και προσεγγιστικά ± 5 για να εκφραστεί το $\theta+5$:

$$\dots = \frac{n}{\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} + 5 - (\theta+5) \right)$$

Άρα ο $\frac{\sum x_i}{n} + 5$ είναι ΑΟΕΔ του $\theta+5$

Δεν χρειάζεται να κάνω τη διαδικασία από την αρχή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν ο U είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$ που προκύπτει ως ισότητα στην ανισότητα C-R, τότε μπορεί να προσδιορίσαμε ΑΟΕΔ εκάστη γραμμικώς συνάρτησης της $g(\theta)$, δηλαδή της μορφής $ag(\theta) + b$, και αυτό γιατί:

$$\begin{aligned} & K(\theta, n)(U - g(\theta)) \\ &= \frac{K(\theta, n)}{a} [au + b - (ag(\theta) + b)] \end{aligned}$$

Με την C-R δεν μπορώ να βρω ΑΟΕΔ για τον θ^2
Διηθεί να γραμμικά συνδυασμοί του θ .

② (Δεύτερη μέθοδος για εύρεσης ΑΟΕΔ)

ΘΕΩΡΗΜΑ Lehmann - Scheffé:

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x|\theta)$.
Έστω ελλιπές $T = T(x_1, \dots, x_n)$ επαρκές και πλήρες στατιστική συνάρτηση της $g(\theta)$
δεν περιέχει
γνωστές παράμετρους

και $U = U(T)$ τέτοιο ώστε $EU = g(\theta)$. Τότε U ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

$T \begin{cases} \text{επαρκές} \\ + \\ \text{πλήρες} \end{cases} \Rightarrow \text{Αν } EU(T) = g(\theta) \text{ τότε } U \text{ ΑΟΕΔ της } g(\theta)$

Μια στατιστική συνάρτηση (σ.σ.) λέγεται ότι είναι επαρκής για το θ αν μας παρέχει όλη τη πληροφορία που υπάρχει στο δείγμα για το παράμετρο αυτό.

Με άλλα λόγια: T επαρκής για το θ αν η δεσφειμένη κατανομή $(x_1, \dots, x_n) | T$ ανεξάρτητο του θ .

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ NEYMAN - FISHER

Η $T = T(x_1, \dots, x_n)$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ αν και μόνο αν

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = g(T(x), \theta) h(x) \quad \forall (\theta \in \Theta)$$

④

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- ① Αν η T είναι επαρκής σ.σ. για το θ , είναι επαρκής και για κάθε 1-1 μετασχηματισμό της θ .
- ② Αν η T είναι επαρκής για το θ , τότε κάθε 1-1 μετασχηματισμός της T είναι επαρκής για το θ .

Μια επαρκής στατιστική συνάρτηση υπάρχει πάντοτε (το ίδιο το δείγμα)

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ: Μια σ.σ. T είναι πλήρης για θ αν και μόνο αν:

$$Eh(T) = 0 \quad \forall \theta$$

$$\Downarrow$$
$$h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\text{Υπόδειξη: } Eh(T) = \begin{cases} \int h(t) f_T(t) dt, & T \text{ συνεχής} \\ \sum h(t) P(T=t), & T \text{ διακριτή} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (από το προηγούμενο)

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $\text{Poisson}(\theta)$

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x=0,1,2$$

$$\theta, \theta+5, \theta^2, \dots$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$$
$$= g(\sum x_i, \theta) h(x)$$

$$g(\sum x_i, \theta) = \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}$$

$$h(x) = \frac{1}{\prod x_i!}$$

$\sum x_i$ επαρκής για το θ , άρα και για το θ^2

Έδειξα ότι είναι επαρκής και θέλω να δείξω ότι είναι πλήρης η T .

Θέλω $T = \sum_{i=1}^n x_i$ πλήρης σ.σ. για το θ .

Αρκεί να δείξω $Eh(T) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$

$$Eh(T) = \sum_t h(t) P(T=t) = \sum_t h(t) \frac{(n\theta)^t e^{-n\theta}}{t!} = \sum_t h(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_t h(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(0) \frac{n^0 \theta^0}{0!} + h(1) \frac{(n\theta)^1}{1!} + \dots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) = h(1) = \dots = 0 \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Δείξατε ότι είναι επαρκής και πλήρης.

Θα βρούμε εκφώνη του θ^2

$$E(U(T)) = \theta^2$$

$$ET = E \sum X_i \stackrel{X_i \sim P(n, \theta)}{=} n\theta$$

$$E \frac{T}{n} = \theta$$

Άρα $\frac{\sum X_i}{n}$ AOΕΔ του θ

$$E\left(\frac{T}{n} + 5\right) = \theta + 5$$

$$\frac{\sum X_i}{n} \xrightarrow{AOΕΔ} \theta + 5$$

$$ET^2 = \text{Var } T + (ET)^2 \stackrel{T \sim \text{Poisson}(n\theta)}{=} n\theta + (n\theta)^2$$

$$ET^2 - n\theta = n^2\theta^2$$

Δεδομένου
να περιέχει
 θ ο εκφώνη
του θ^2
 $n\theta = ET$

$$\frac{ET^2 - n\theta}{n^2} = \theta^2 \Rightarrow \frac{ET^2 - ET}{n^2} = \theta^2 \Rightarrow E \frac{T^2 - T}{n^2}$$

Θέλω να βρω μια U που η μέση τιμή να είναι θ^2

$$e^x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!}$$

$$\sum_t U(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = \theta^2 e^{n\theta}$$

$$\sum_t U(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = \theta^2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta)^t}{t!}$$

$$\sum_t U(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta)^t}{t!} \theta^2 \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} U(t) \frac{n^t \theta^t}{t!} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \theta^{t+2}}{t!}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} U(t) \frac{n^t \theta^t}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{n^{t-2} \theta^t}{(t-2)!}$$

$$U(0) = 0$$

$$U(1) = 0$$

$$\frac{U(t)n^t}{t!} = \frac{n^{t-2}}{(t-2)!} \quad \forall t \geq 2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{t!}{(t-2)!} \frac{n^{t-2}}{n^t}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(t) = \frac{(t-1)t}{n^2}}$$

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΜΗΧΟΡΑ:

ΓΙΑ ΤΟ θ^k Η ΙΔΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ